E.Q. pour $\mathbb{Q}_p$ $+, -, \cdot, 0, 1, P_2, \dots$

(P_2 : carré)

$$\int |g(x)|^s \cdot |dx| \quad \text{— rationnelle en } p^{-s}$$

$x \in S \subset \mathbb{Z}_p^n$ (S déf)

cas spéciale : g est polynôme.

(cas général : $g : S \to \mathbb{Z}_p$ est définissable)

réduit (résolution de sing) → monômes.

$$\int |x_1^{a_1} \cdot x_2^{a_2} \cdots|^s \, |dx|$$

$c \cdot x_1^{b_1} \cdot x_2^{b_2} \in P_n$, $x_i \in \mathbb{Z}_p$

$\{(x_1, x_2) \in \mathbb{Z}_p^2 \mid x_1 \cdot x_2 \in P_3\}$

→ partitionner en produits cart.

$x \in P_3$ — $x = a_\ell p^\ell + a_{\ell+1} p^{\ell+1} + \dots$, $a_\ell \neq 0$

$(p, 3) = 1$, copmime. a_ℓ est cube dans $\mathbb{F}_p$ et $\ell \equiv 0 \mod 3$.

$$[\mathbb{Q}_p^\times : P_3^\times] < \infty$$

dom $\mathbb{F}_p^\times$, cubes ont indice fini (1 ou 3.)

$$\mathbb{F}_p^\times = (\mathbb{F}_p^\times)^3 \cup \underbrace{\varepsilon}_{\text{non-cube}} \cdot (\mathbb{F}_p^\times)^3 \cup \underbrace{\varepsilon^2}_{\text{non-cube}} (\mathbb{F}_p^\times)^3$$

$\varepsilon \in \mathbb{F}_p^\times$

$$\mathbb{Q}_p^\times = P_3 \cup \varepsilon \cdot P_3 \cup \varepsilon^2 P_3 \qquad \varepsilon \in \{1, \dots, p-1\}$$

$$\cup\, p P_3 \cup p\varepsilon P_3 \cup p\varepsilon^2 P_3 \longrightarrow \mathrm{ord}(x) \equiv 1 \bmod 3$$

$$\cup\, p^2 P_3 \cup p^2\varepsilon P_3 \cup p^2\varepsilon^2 P_3 \longrightarrow \mathrm{ord}(x) \equiv 2 \bmod 3$$

$$X_1 \cdot X_2 \in P_3 \quad , \quad X_i \neq 0$$

P_3^2 — $\{(X_1, X_2) \mid X_1 \in P_3 \wedge X_2 \in P_3\}$

$\varepsilon P_3 \times \varepsilon^2 P_3$ — $\{\dots \mid X_1 \in \varepsilon P_3 \wedge X_2 \in \varepsilon^2 P_3\}$

$\cup$

$\cup$

. . . . . .

$g : S \longrightarrow \mathbb{Z}_p$ est déf

(Michéline Fakhruddin)

pol $\rightarrow$ monôme..

- rés. de sing.
- partition finies en cellules

Corentin Bonboy. — monômes

$$E(p^m) = \left(\sum_{x \in (\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z})^n} \exp\left(2\pi i \frac{f(x)}{p^m}\right) \right) \cdot \frac{1}{p^{mn}}$$

note. $|E(p^m)| \leq 1$.

si le degré $f = 1$ alors $E(p^m) = 0$ pour m grand.

$f(x) = x_1^2$, une var. $\underbrace{\text{toujours le cas ?}}$

$$E(p) = \text{"somme de Gauss" renormalisée} = \frac{1}{p} \sum_{x=0}^{p-1} e^{2\pi i x^2}$$

$$\underbrace{|E(p)| = \cancel{\sqrt{p}}^{\,1} = p^{-\frac{1}{2}}}_{\text{livre Ireland \& Rosen.}} \quad p > 2.$$

thm. Plancherel
la norme L^2 est préservée sous Fourier.

sur $\mathbb{F}_p, +$.

Deligne ± 1960 vaste généralisation. Conj. de Weil.

$$f = f_0 + f_1 + \dots + \boxed{f_d}$$

partie homogène de degré d.

$$(*) \quad \frac{\partial f_d}{\partial x_1} = 0 = \dots = \frac{\partial f_d}{\partial x_n}$$

appelons f_d lisse si $x = 0$ est la solution unique

de (*) . . <u>exemple</u> : $\underbrace{x_1^d + x_2^d + \dots + x_n^d}_{f_d}$

Si f_d est lisse Deligne.

$$|E(p)| \leq C_{d,n} \cdot p^{-\frac{n}{2}}.$$

(Weil l'avait déjà quand $n = 1$)

<u>Deligne</u> : $\left\{ \begin{array}{l} \text{cohomologie } l\text{-adique.} \\ \text{formule de Trace de Grothendieck} \end{array} \right.$

$$\boxed{? \text{ Si } f_d \text{ est lisse : } |E(p^m)| < \dots ?}$$

$f(x) = x_1^3$ (une variable). $|E(p^m)| \leq c\, p^{-m \cdot \frac{1}{3}}$

$$|E(p)| \leq c \cdot p^{-\frac{1}{2}} \leq c\, p^{-1 \cdot \frac{1}{3}}$$

$$E(p^2) = \Big(\sum_{x_1 = x \in \mathbb{Z}/p^2} e^{2\pi i \frac{x^3}{p^2}} \Big) \frac{1}{p^2} = \sum_{x=0}^{p^2-1} \dots$$

ex.

$$= \frac{1}{p^2} \sum_{\substack{x=0 \\ p \mid x}}^{p^2-1} \exp\left(2\pi i \frac{x^3}{p^2}\right) = \frac{1}{p^2} \sum_{x'=0}^{p^2-1} e^{2\pi i \frac{p^3 \cdot x'^3}{p^2}}$$

$p x' = x$

$e^{2\pi i p x'^3} = 1$

div. de Taylor autour a_0

si $p \nmid x$

$p, 2p, 3p, \dots, p^2 - p$

$x = a_0 + p a_1 + \dots \longrightarrow$ <u>linéaire</u> (<u>deg = 1</u>) $\rightarrow 0$.

$$E(p^2) = \frac{1}{p^2}\cdot p = p^{-1}.$$

$$E(p^3) = p^{-1} = (p^{-3})^{\frac{1}{3}}$$

$$E(p^4) = \frac{1}{p^4}\sum_{\substack{x=0 \\ p\mid x}}^{p^4-1} e^{\frac{p^3x'^3}{p^4}} = \frac{E(p)}{p}$$

$$px' = x$$

$$|E(p^4)| \leq c\cdot p^{-3/2}.$$

$$E(p^5) = p^{-2} - \sum_{\substack{p^2\mid x,\ x=0}}^{p^5-1}$$

Taylor

dans ce cas :

$$\sum_{m\geq 1} E(p^m)\cdot T^m \in \mathbb{C}[[T]]$$

rationnelle dans $\mathbb{C}(T)$

$$\frac{p(T)}{q(T)}$$

? Question ouverte spécifiée : f_d est lisse ?

$$|E(p^m)| \leq c_{(p,f)}\cdot (p^{-m})^{\frac{n}{d}}$$

?

? c_f sans dépendance de p ?

conv : $\frac{n}{d} \leq 1$.

Igusa : $f = f_d$ et f_d lisse. $(d \geq 2)$.

$$|E(p)| \leq c\, p^{-\frac{n}{2}} \leq c\, p^{-\frac{n}{d}}.$$

$$E(p^2) = p^{-n} \longrightarrow \sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{p\mid x_i \\ x_i=0}}^{p^2-1}$$

$$E(p^d) = p^{-n} \leq c \cdot p^{-d \cdot \frac{n}{d}}$$

$$E(p^{d+1}) = p^{-n} \cdot E(p)$$

$$E(p^{d+2}) = p^{-2n}$$

- Igusa $f_d = f$ lisse
- $\frac{n}{d} \leq 1$ f_d lisse $(f \neq f_d)$ $\longrightarrow$ Mustata Nguyen, C.
- $\frac{n}{d} \leq \frac{1}{2}$ plus ancien

? général.

<u>Thm. Rationalité</u>: f général.

$$P(T) = \sum_{m \geq 1} E(p^m) T^m \in \mathbb{C}[[T]]$$

est rationnelle $P(T) = \dfrac{p(T)}{q(T)}$

$P \cdot q = p$.